Licence « Sciences pour l'ingénieur »

DS 2.3 - Énergétique et circuits électriques

Franco FERRUCCI
franco.ferrucci@upf.pf

Version v00

Contenu

Méthodes d'analyse des circuits

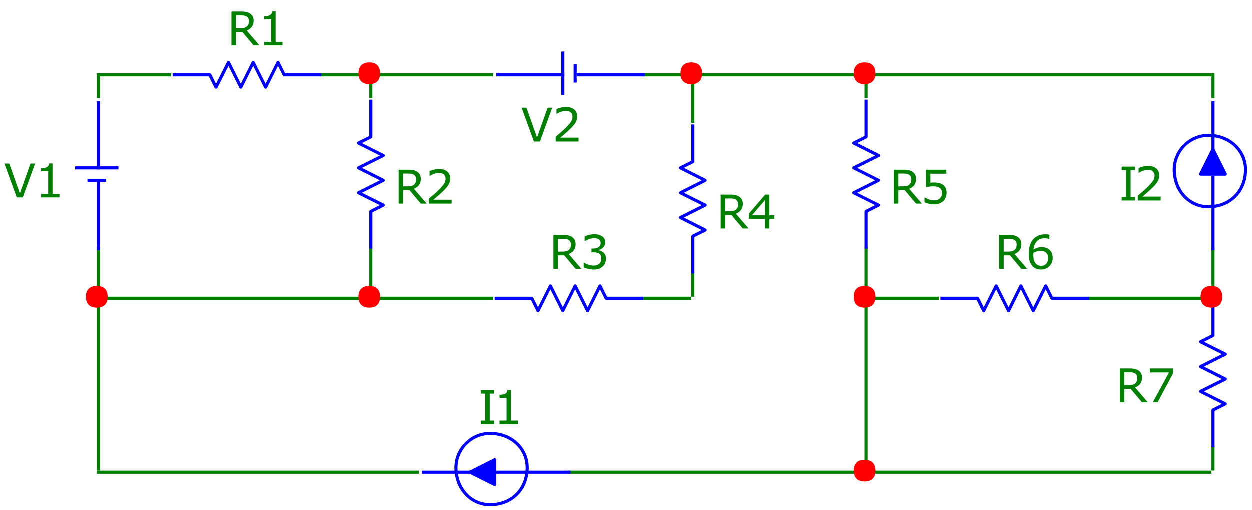
- Rappel méthodes déjà vues :
  - Résistance équivalente, Transformation Y ↔ Δ, Diviseur de tension, Diviseur de courant
- Méthode LKC et LKT en mode « force brute »
- Nœuds, branches et boucles
- Théorème fondamental de la topologie des réseaux
- Structure des circuits : planaires et non-planaires
- Méthode LKC et LKT en mode « force brute amélioré »
- Le Méthode de nœuds : Application systématique des LKT et LKC
  - Cas particulier : sources de tension entre deux nœuds autres que le nœud de référence

Méthodes d’analyse des circuits

Méthodes d'analyse des circuits

Résoudre un circuit… ça veut dire quoi ?

- C'est déterminer les **tensions** et **courants** de tous les composants du circuit.
- Cela permet ensuite de calculer, par exemple :
  - La **puissance** et énergie dissipée ou fournie par chaque élément,
  - L'**énergie** consommée ou produite par le circuit.
  - Le **rendement** d'une partie du circuit (rapport entre l'énergie ou puissance utile et l'énergie ou puissance consommée).



Rappel : pour des **résistances**, la puissance est calculé comme

$P = V \cdot I = I^2 \cdot R = V^2/R$

Méthodes d'analyse des circuits

On connaît déjà quelques méthodes :

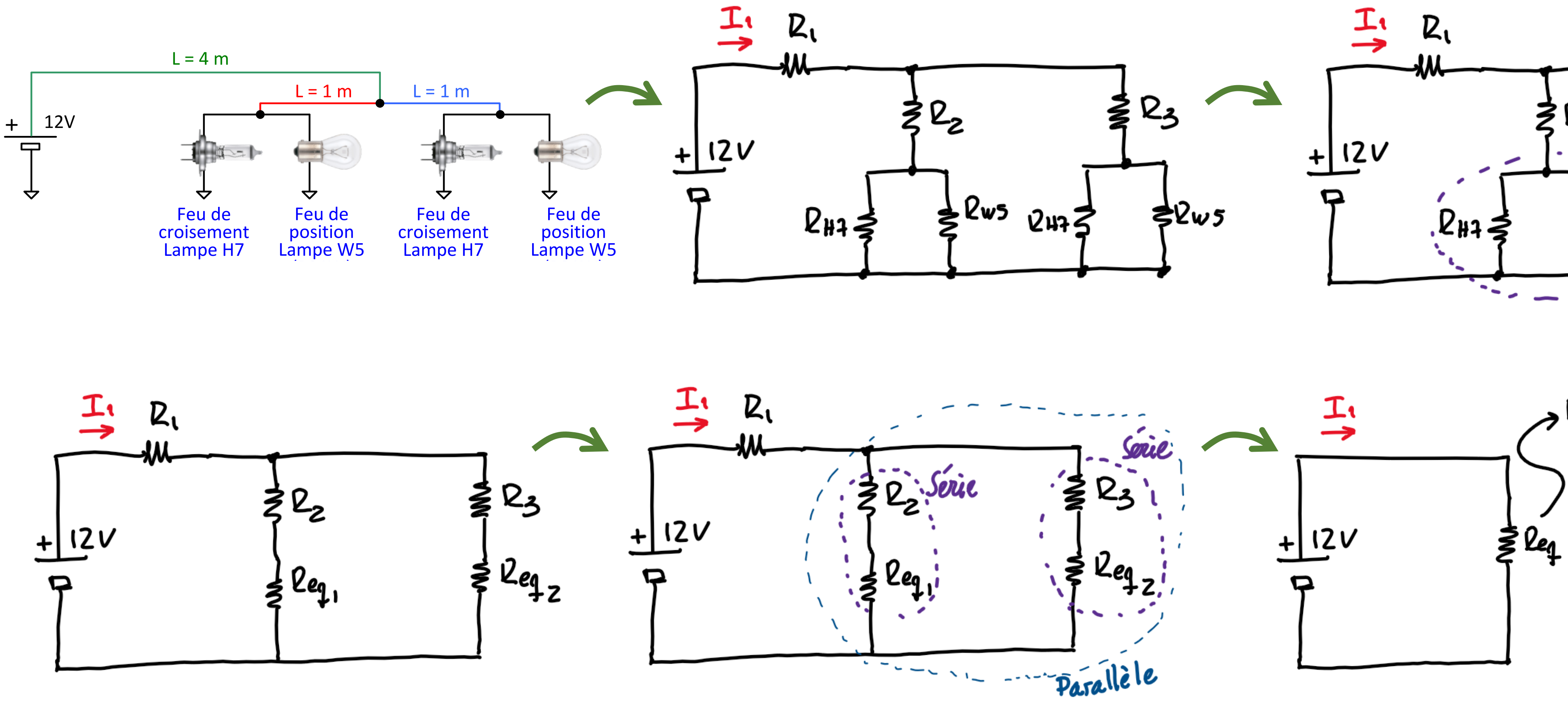
- Résistance équivalente:
  - Réduire le circuit en combinant les R selon leur connexion (série, //)
  - Si ce n'est pas possible, essayer avec la transformation $Y \leftrightarrow \Delta$
- Diviseur de tension
- Diviseur de courant

❖ Pour des circuits simples, ces méthodes sont efficaces.

❖ Mais pour des circuits plus complexes, elles deviennent vite insuffisantes ou trop longues à appliquer.

Méthodes d'analyse des circuits

Exemple : Rendement du système des feux avant d'une voiture (voir TD2)



$$R_{eq} = R_1 + (R_2 + R_{eq_1}) // (R_3 + R_{eq_2})$$

$$I_1 = \frac{12V}{R_{eq}}$$

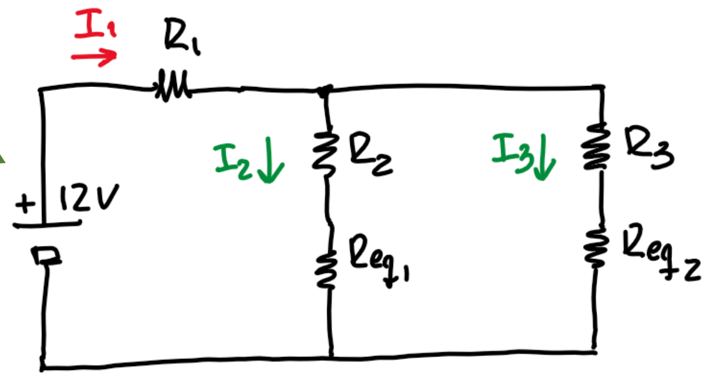
$$P_{gén} = 12V \cdot I_1$$

Puissance générée par la batterie de 12 V

Méthodes d'analyse des circuits

Exemple : Rendement du système des feux avant d'une voiture (voir TD2)

Maintenant qu'on a calculé I1 et la puissance de la source, **on revient en arrière** pour calculer les **puissances des lampes.**



Diviseur de courant:

$$I_2 = \frac{(R_3+R_{eq_2})}{(R_2+R_{eq_1})+(R_3+R_{eq_2})} \times I_1$$

$$I_3 = \frac{(R_2+R_{eq_1})}{(R_2+R_{eq_1})+(R_3+R_{eq_2})} \times I_1$$

Puissances lampes:

$$P_{lampes} = (P_{H7}+P_{W5})+(P_{H7}+P_{W5})$$

$$= P_{R_{eq_1}} + P_{R_{eq_2}}$$

$$= I_2^2 . R_{eq_1} + I_3^2 . R_{eq_2}$$

Rendement:

$$\eta = \frac{P_{lampes}}{P_{gén}} = \frac{I_2^2 R_{eq_1} + I_3^2 R_{eq_2}}{12V . I_1}$$

Méthodes d'analyse des circuits

Une autre option ?

Ex : Appliquer directement les LKC et LKT en mode « force brute »

a) Compter le nombre d'inconnues.

b) Écrire les équations de la LKC aux jonctions et celles de la LKT sur des boucles fermées, jusqu'à obtenir autant d'équations que d'inconnues.

c) Résoudre le système d'équations.

Problèmes :

- Pas de stratégie claire
- Risque d'introduire des équations redondantes

Ex:

$$3x + y = 5 \quad (\text{éq. } 1)$$

$$6x + 2y = 10 \quad (\text{éq. } 2)$$

L'équation 2 est égale à l'équation 1, multipliée par 2 !

$\Rightarrow$ 2 éq. mais 1 redondante !

Méthodes d'analyse des circuits

Concepts clés

Avant de continuer…des concepts clés

- **Branche** (branch) : Élément du circuit (R, source d'alim., bobine, diode, …)
- **Nœud** (node) : point commun entre plusieurs branches
- **Maille** ou **boucle fermée** (loop) : boucle fermée des branches (peut ou non traverser des branches)

Théorème fondamentale de la topologie des réseaux

$$b = L + N - 1$$

branches

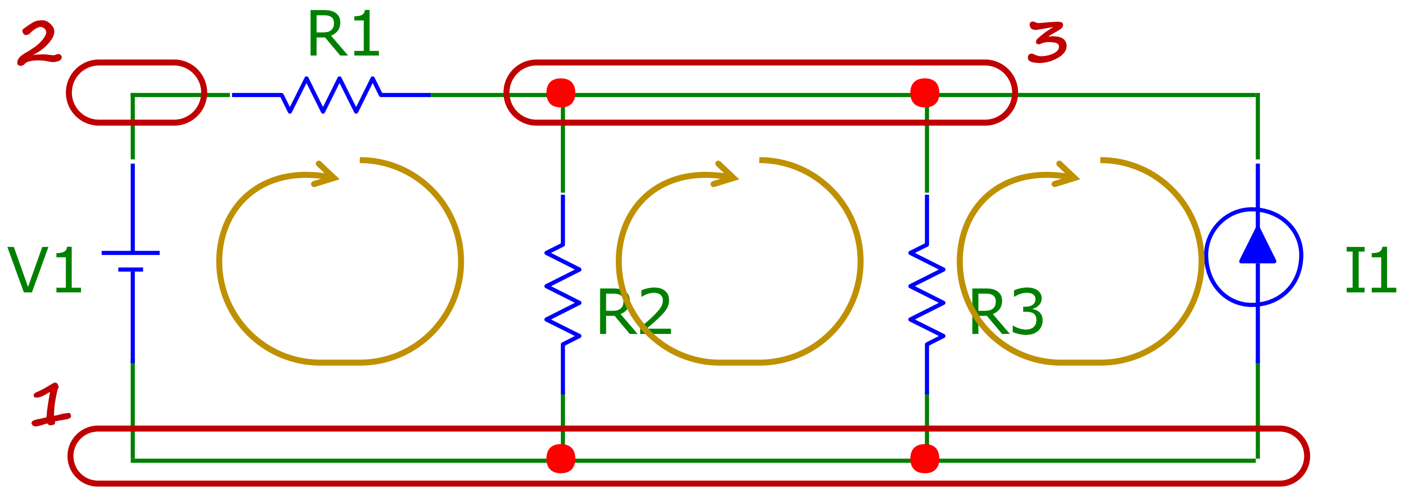
nœuds

boucles indépendante maximales : ce sont les boucles auxquelles, lorsqu'on applique la LKT, on obtient des équations indépendantes les unes des autres.

Méthodes d'analyse des circuits

Concepts clés

Exemple :



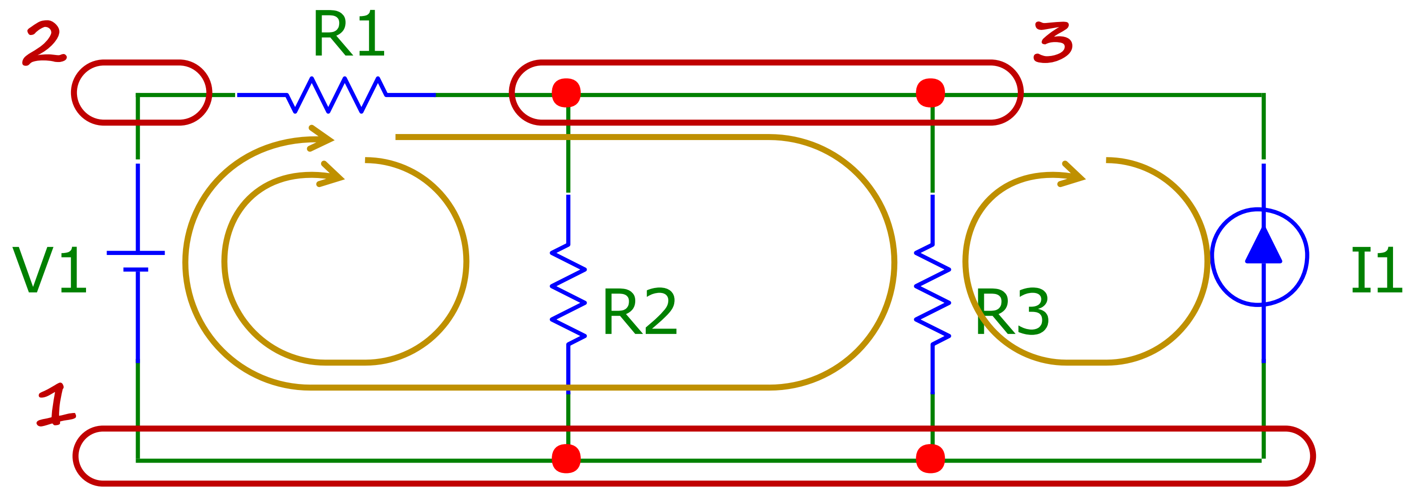
- 3 nœuds (N=3)
- 5 braches (b=5)
- $b = L + N - 1 \Rightarrow L = b - N + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$ boucles indép.

auxquelles, lorsqu'on applique la LKT, on obtient des équations indépendantes les unes des autres.

Méthodes d'analyse des circuits

Concepts clés

Exemple :



- 3 nœuds (N=3)
- 5 braches (b=5)
- $b = L + N - 1 \Rightarrow L = b - N + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$ boucles indép.

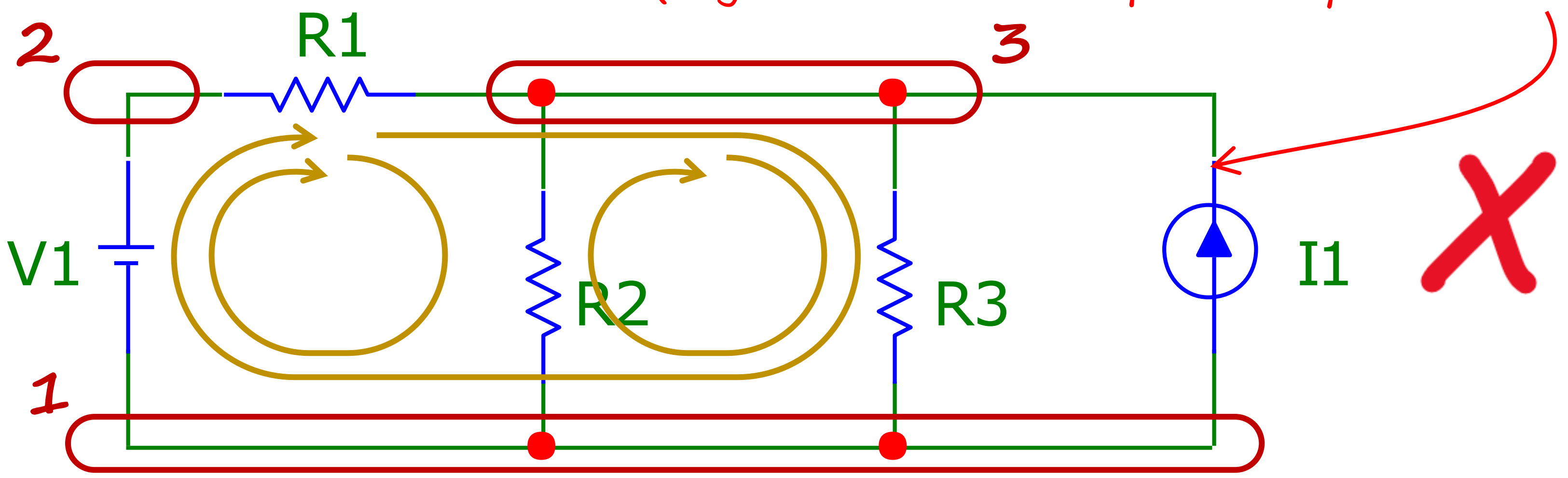
auxquelles, lorsqu'on applique la LKT, on obtient des équations indépendantes les unes des autres.

Méthodes d'analyse des circuits

Concepts clés

Exemple :

Ces 3 boucles **ne sont pas indépendantes**
(il y a une branche qui n'est pas enlacée)



- 3 nœuds (N=3)
- 5 braches (b=5)
- $b = L + N - 1 \Rightarrow L = b - N + 1 = 5 - 3 + 1 = 3$ boucles indép.

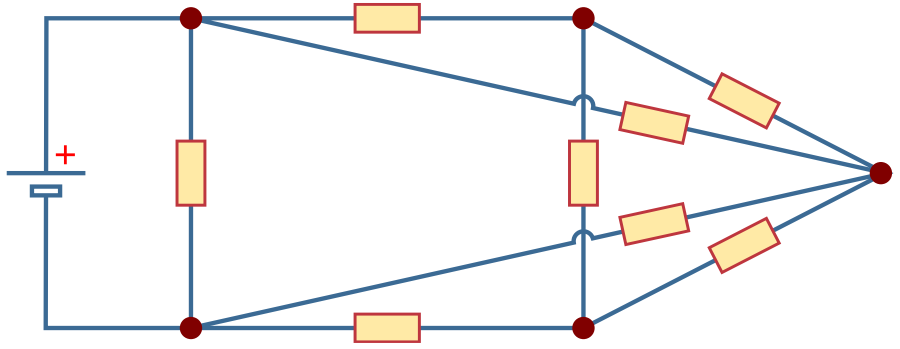
auxquelles, lorsqu'on applique la LKT, on obtient des équations indépendantes les unes des autres.

Méthodes d'analyse des circuits

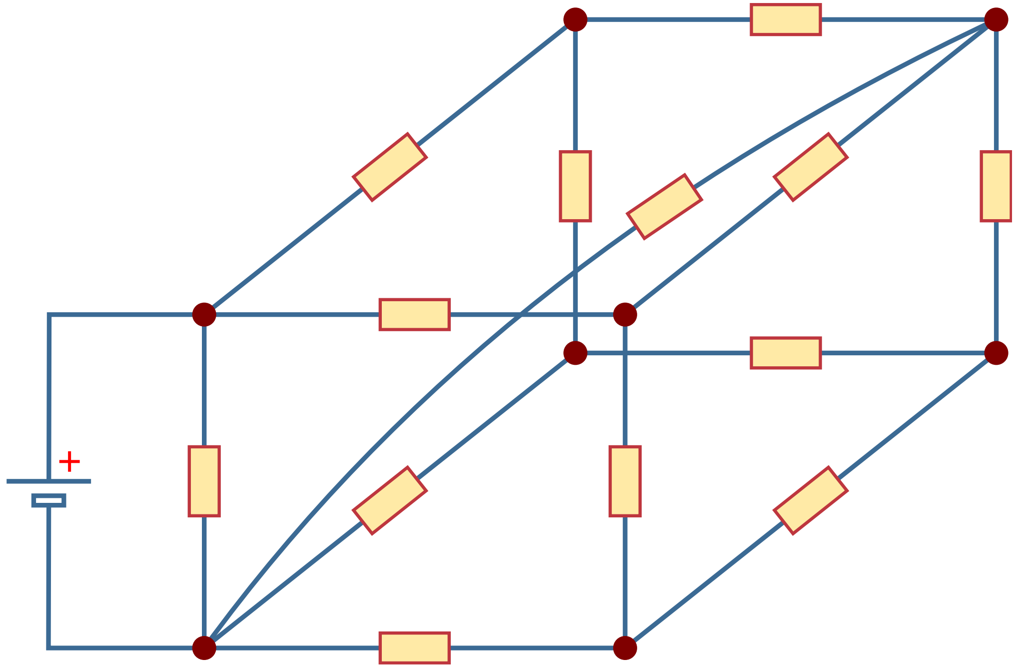
Concepts clés

Structure des circuits : planaires et non-planaires

- **Planaires** : circuits pouvant être représentés sur un plan sans que les branches ne se croisent.
- **Non-planaires** : circuits nécessitant un croisement de branches lorsqu'ils sont dessinés sur un plan.



Ce circuit est en réalité planaire…pourquoi ?



Ex : circuit non-planaire

Méthodes d'analyse des circuits

Maintenant qu'on sait que, dans un circuit, $b = N + K - 1$

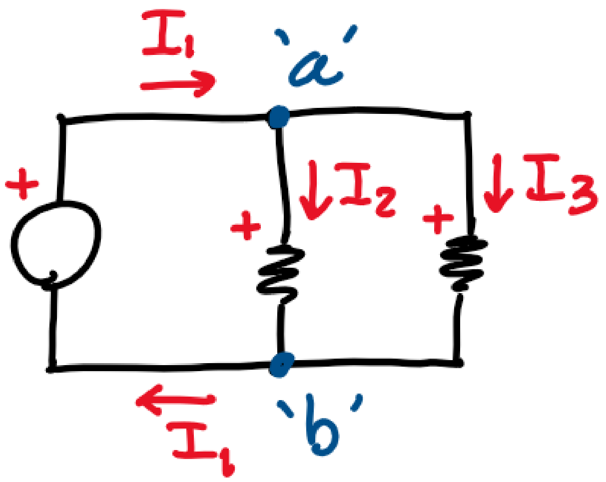
Questions :

1. Combien d'équations de la LKC ($\Sigma i = 0$) sont-elles indépendantes ?
2. Combien d'équations de la LKT ($\Sigma v = 0$) sont-elles indépendantes ?

Réponses :

1. LKC : $N - 1$ équations indépendantes

Ex. :



LKC 'a' : $I_1 - I_2 - I_3 = 0$

LKC 'b' : $-I_1 + I_2 + I_3 = 0$

Sont les mêmes equations !

$N = 2 \Rightarrow N - 1 = 1$ éq. indépendante

Méthodes d'analyse des circuits

Maintenant qu'on sait que, dans un circuit, $b = N + K - 1$

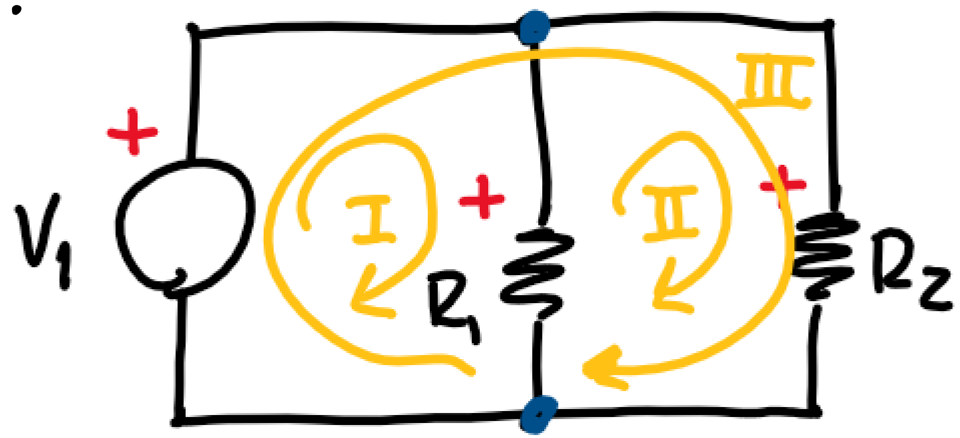
Questions :

1. Combien d'équations de la LKC ($\Sigma i = 0$) sont-elles indépendantes ?
2. Combien d'équations de la LKT ($\Sigma v = 0$) sont-elles indépendantes ?

Réponses :

2. LKT : L équations indépendantes

Ex. :



LKT I : $-V_1 + V_{R_1} = 0$ (éq. 1)

LKT II : $-V_{R_1} + V_{R_2} = 0$ (éq. 2)

LKT III : $-V_1 + V_{R_2} = 0$ (éq. 3)

éq. 1 + éq. 2 $= -V_1 + \cancel{V_{R_1}} - \cancel{V_{R_1}} + V_{R_2} = 0 =$ éq. 3 !

$\Rightarrow L = 2$ éq. indépendantes

Méthodes d'analyse des circuits

- N − 1 équations LKC
- L équations LKT

→ On peut appliquer les LKC et LKT en mode « force brute » amélioré

LKC et LKT en mode « force brute » amélioré :

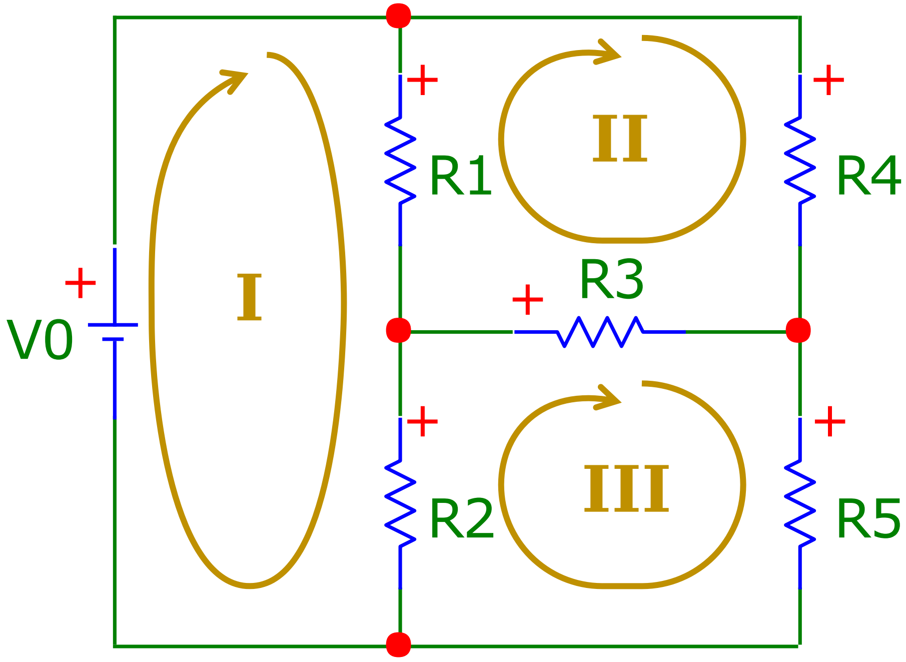
Procédure :

1. Écrire la relation V–I de chaque élément (ex. loi d'Ohm pour des résistances).
2. Écrire N–1 équations de la LKC ($\Sigma i = 0$)
3. Écrire L équations de la LKT ($\Sigma v = 0$)
4. Résoudre le système d'équations (algèbre linéaire!)

- Élimination de Gauss
- Règle de Cramer
- Python !
- …

Méthodes d'analyse des circuits

Exemple :



6 équations

6 inconnues

Solution !

$(i_O, v_O, i_{R1}, v_{R1}, \ldots)$

Topologie du circuit :

- $b = 6$
- $N = 4$
- $L = b - N + 1 = 3$

Nombre d'inconnues :

6 composants

$\Rightarrow$ **12** tensions et courants inconnus

1. Relations V-I :

$$\left.\begin{aligned} v_{R1} &= R1 \,.\, i_{R1} \\ v_{R2} &= R2 \,.\, i_{R2} \\ &\ldots \\ v_{R5} &= R5 \,.\, i_{R5} \\ v_{VO} &= V_O \text{ (constante)} \end{aligned}\right\} \text{6 équations}$$

2. « N-1 » LKC ($\Sigma i = 0$)

$$\underbrace{\begin{aligned} i_O &= i_{R1} + i_{R4} \\ i_{R1} &= i_{R2} + i_{R3} \\ i_{R4} + i_{R3} &= i_{R5} \end{aligned}}_{\text{3 équations}}$$

3. « N-1 » LKT ($\Sigma v = 0$)

$$\underbrace{\begin{aligned} - V_O + v_{R1} + v_{R2} &= 0 \\ - v_{R1} + v_{R4} - v_{R3} &= 0 \\ - v_{R2} + v_{R3} + v_{R5} &= 0 \end{aligned}}_{\text{3 équations}}$$

Méthodes d'analyse des circuits

Méthode des nœuds

- C'est une méthode un peut plus formelle, plus **compacte** et **systématique**
- **Procédure :**
  1. Sélectionner un nœud comme le « nœud de référence » ou « masse » (0 V !)

     Astuce : choisir celui qui est connecté au plus grand nombre de branches.
  2. Identifier les tensions dans le reste des nœuds : e_1, e_2, e_3, …

     Astuce : on utilise **« e »** pour ne pas confondre avec la tension **« v »** d'un élément.
  3. Appliquer la LKC pour chaque nœud (sauf pour la masse). Utiliser la loi V–I des composants pour exprimer les courants en fonction des tensions.
  4. Résoudre le système d'équations ⇒ Solution ! (e_1, e_2, e_3, …).

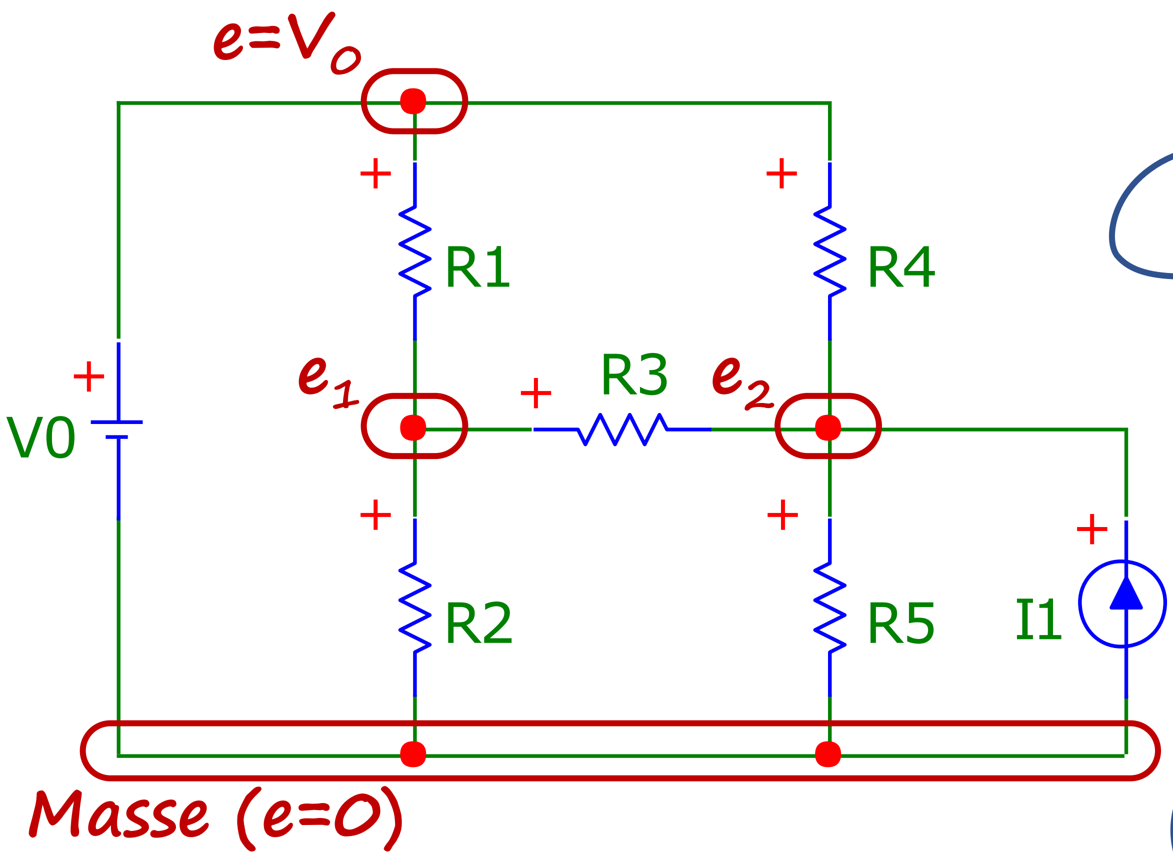
     Avec les tensions de nœuds on peut calculer les tensions et courant des éléments !

Cas particulier : circuit contenant des **sources de tension entre deux nœuds** qui ne sont pas reliés à la masse → **à voir plus tard**

Méthodes d'analyse des circuits

Méthode des nœuds

Exemple :



LKC ($\Sigma i = 0$) sur nœud e_1 :

$$i_{R1} - i_{R2} - i_{R3} = 0$$

$$\frac{V_0 - e_1}{R1} - \frac{e_1 - 0}{R2} - \frac{e_1 - e_2}{R3} = 0$$

$$(V_0 - e_1)G1 \quad -e_1 G2 \quad -(e_1 - e_2)G3 = 0$$

$$\boxed{e_1(-G1 - G2 - G3) + e_2(G3) = -V_0 G1}$$

LKC ($\Sigma i = 0$) sur nœud e_2 :

$$i_{R3} + i_{R4} - i_{R5} + I1 = 0$$

$$\frac{e_1 - e_2}{R3} + \frac{V_0 - e_2}{R4} - \frac{e_2 - 0}{R5} = 0$$

$$(e_1 - e_2)G3 \quad +(V_0 - e_2)G4 \quad -e_2 G5 = 0$$

$$\boxed{e_1(G3) + e_2(-G3 - G4 - G5) = -V_0 G4 - I1}$$

Méthodes d'analyse des circuits

M

Ex

$$e_1\left(-G1-G2-G3\right)+e_2\left(G3\right)=-V_0G1$$
$$e_1\left(G3\right)+e_2\left(-G3-G4-G5\right)=-V_0G4-I1$$

$\rightarrow$ Forme matricielle

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -G1-G2-G3 & G3 \\ G3 & -G3-G4-G5 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{bmatrix} -V_0G1 \\ -V_0G4-I1 \end{bmatrix}}_{b}$$

+

V0 –

A . x = b ➡  ➡ On obtient $x=[e_1, e_2]^T$

- Élimination de Gauss
- Règle de Cramer
- Python !
- …

Avec e_1 et e_2, ainsi que les paramètres du circuit (V_0, R1, R2,…), on peut calculer toutes les autres variables !

Ex : $i_0 = (V_0-e_1)G1+ (V_0-e_2)G4$

Ma

0

0

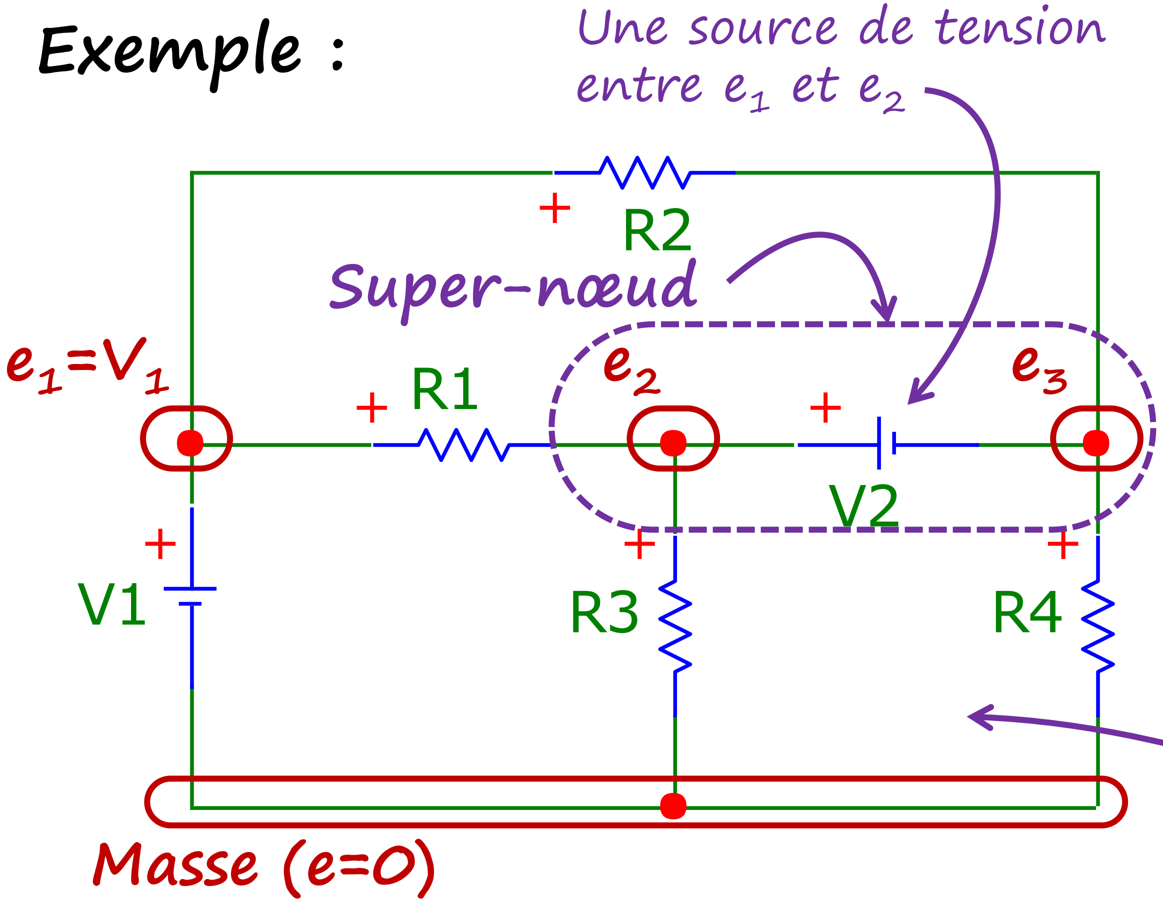
0

Méthodes d'analyse des circuits

Méthode des nœuds

Cas particulier : Circuit contenant une **source de tension entre deux nœuds** non reliés directement à la masse.

Exemple :



Procédure :

1. On suit les mêmes pas qu'avant, sauf que, pour chaque super-nœud, on applique la LKC sur le super-nœud lui-même, et non sur les deux nœuds qui le composent.
2. On ajoute une équation (une contrainte) : celle de la relation entre la source de tension et les nœuds du super-nœud.

$$V_2 = e_2 - e_3$$

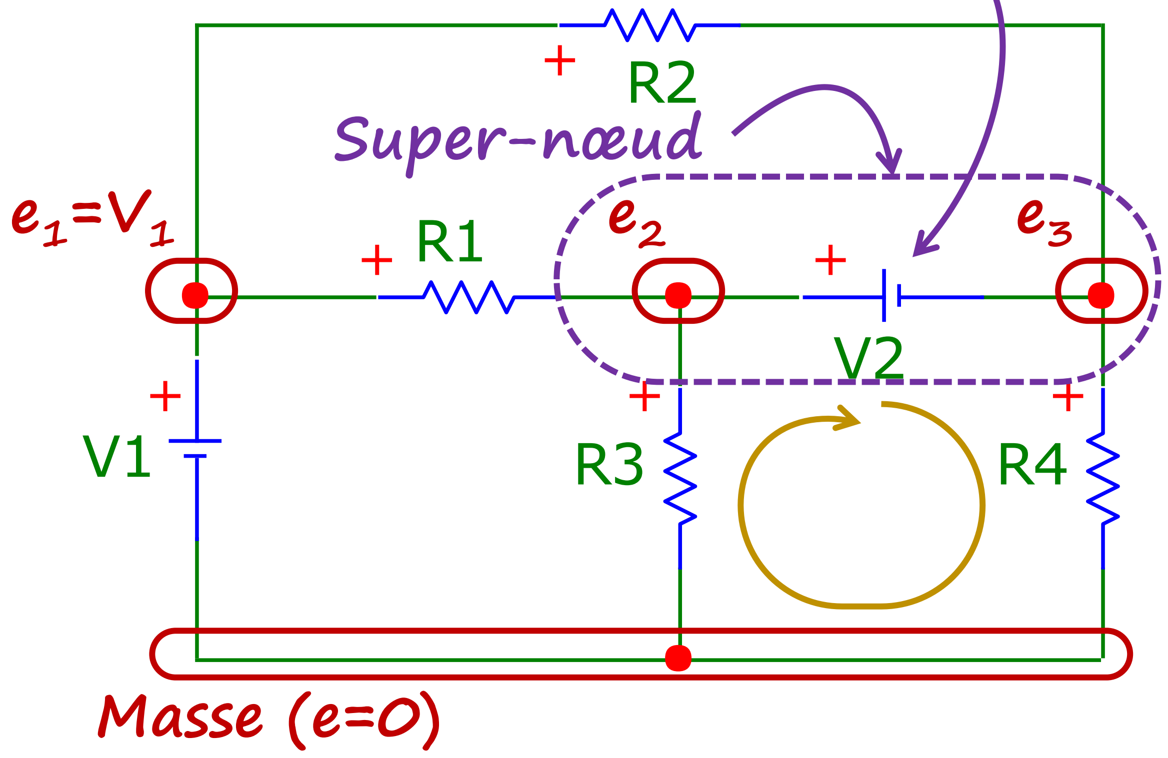
Méthodes d'analyse des circuits

Méthode des nœuds

Cas particulier : Circuit contenant une **source de tension entre deux nœuds** non reliés directement à la masse.

Exemple :

Une source de tension entre e_1 et e_2



Procédure :

1. **LKC (Σi = 0) sur le super-nœud :**

$$
\begin{array}{ccccc}
i_{R1} & +\, i_{R2} & -\, i_{R3} & -i_{R4} & = 0 \\
(V_1 - e_2)G1 & +(V_1 - e_3)G2 & -e_2G3 & -e_3G4 & = 0
\end{array}
$$

V_1 est une donnée !

2. **V_2 = f(e_2, e_3) :**

$$V_2 = e_2 - e_3$$

V_2 est une donnée !

Méthodes d'analyse des circuits

Méthode des nœuds

Cas ... non

reliés

Exem...

$$(V_1 - e_2)G1 + (V_1 - e_3)G2 - e_2G3 - e_3G4 = 0$$
$$V_2 = e_2 - e_3$$

Forme matricielle

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -G1-G3 & -G2-G4 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} -V_1(G1+G2) \\ -V_2 \end{bmatrix}}_{b}$$

$x=[e_2, e_3]^T$

$= 0$

$= 0$

$e_1=V_1$

+

V1

V_2 est une donnée !

Masse (e=0)

Māuruuru !