

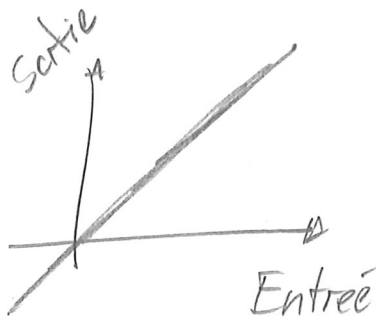
# CM #4 : Théorèmes des circuits ①

## Linéarité

Raisonnement typique (incomplet!)

Linéarité  $\rightarrow$  linéaire  $\rightarrow$  ligne

• ligne droite  $\rightarrow$  Entrée  $\Rightarrow$  ligne droite  $\Rightarrow$  Sortie



$$\text{Sortie} = a \times \text{Entrée}$$

} la sortie est  
proportionnelle  
à l'entrée

Cela ne marche pas  
pour les syst. linéaires  
dynamiques (plus tard...)

Linéarité  $\rightarrow$  le syst. satisfait

le principe de SUPERPOSITION

Homogénéité + Additivité



l'entrée est  
multipliée par  
une constante

la sortie est  
multipliée par la  
même constante



On peut combiner les 2 propriétés

$$u_1(t) \rightarrow y_1(t)$$

$$u_2(t) \rightarrow y_2(t)$$

$$a u_1(t) + b u_2(t) \rightarrow a y_1(t) + b y_2(t)$$

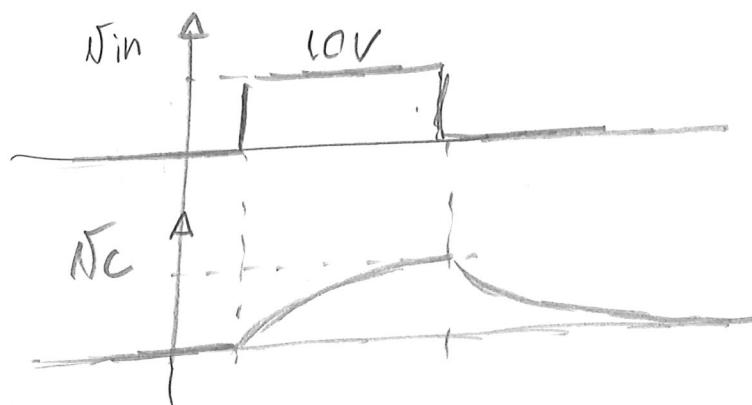
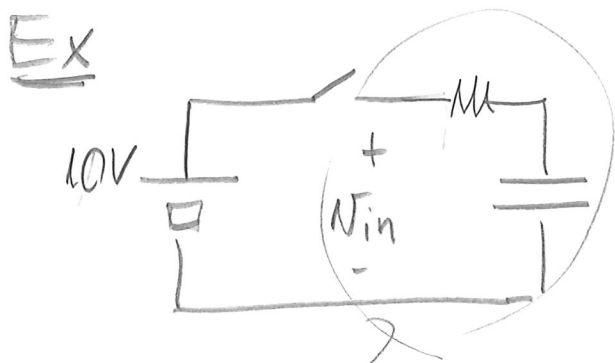
# Systèmes physiques dynamiques?

(2)

→ Syst. avec mémoire, ou avec stockage d'énergie

→ La valeur de l'entrée à un instant donné n'est pas suffisante pour calculer la sortie à ce même instant.

→ La relation entre l'entrée  $u(t)$  et la sortie  $y(t)$  est exprimée par une eq. différentielle



→ Ce système est linéaire !

=====

# Systèmes statiques ?

↳ Sans mémoire / stockage d'énergie

↳  $y = f(u)$

↳ s'on connaît  $u$  à l'instant  $t$ ,  
on peut calculer la sortie  $y$   
à ce même instant

↳ Dans ce cas, le système statique  
sera linéaire si  $f() =$  ligne droite



Ex: Résistance : linéaire

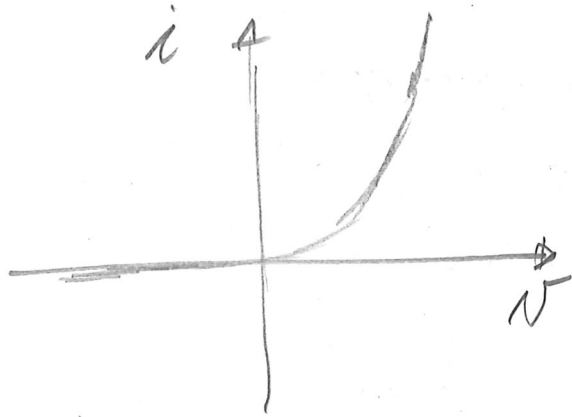
Entrée                  Sortie

$$V \rightarrow i = \left(\frac{1}{R}\right) \cdot V$$

$$i \rightarrow V = (R) \cdot i$$

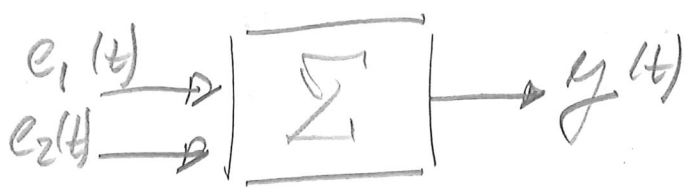
$R$ : constante

Ex 2 : Diode



statique ✓  
linéaire ✗

Systèmes avec multiples entrées et sorties ?



$$e_1(t) = f(t) \longrightarrow y_1(t)$$

$$e_2(t) = 0$$

$$e_1(t) = 0 \longrightarrow y_2(t)$$

$$e_2(t) = g(t)$$

Pour calculer la sortie on peut considérer la réponse à chaque entrée de manière individuelle

$$\left. \begin{array}{l} e_1(t) = f(t) \\ e_2(t) = g(t) \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{linéaire}} y(t) = y_1(t) + y_2(t)$$

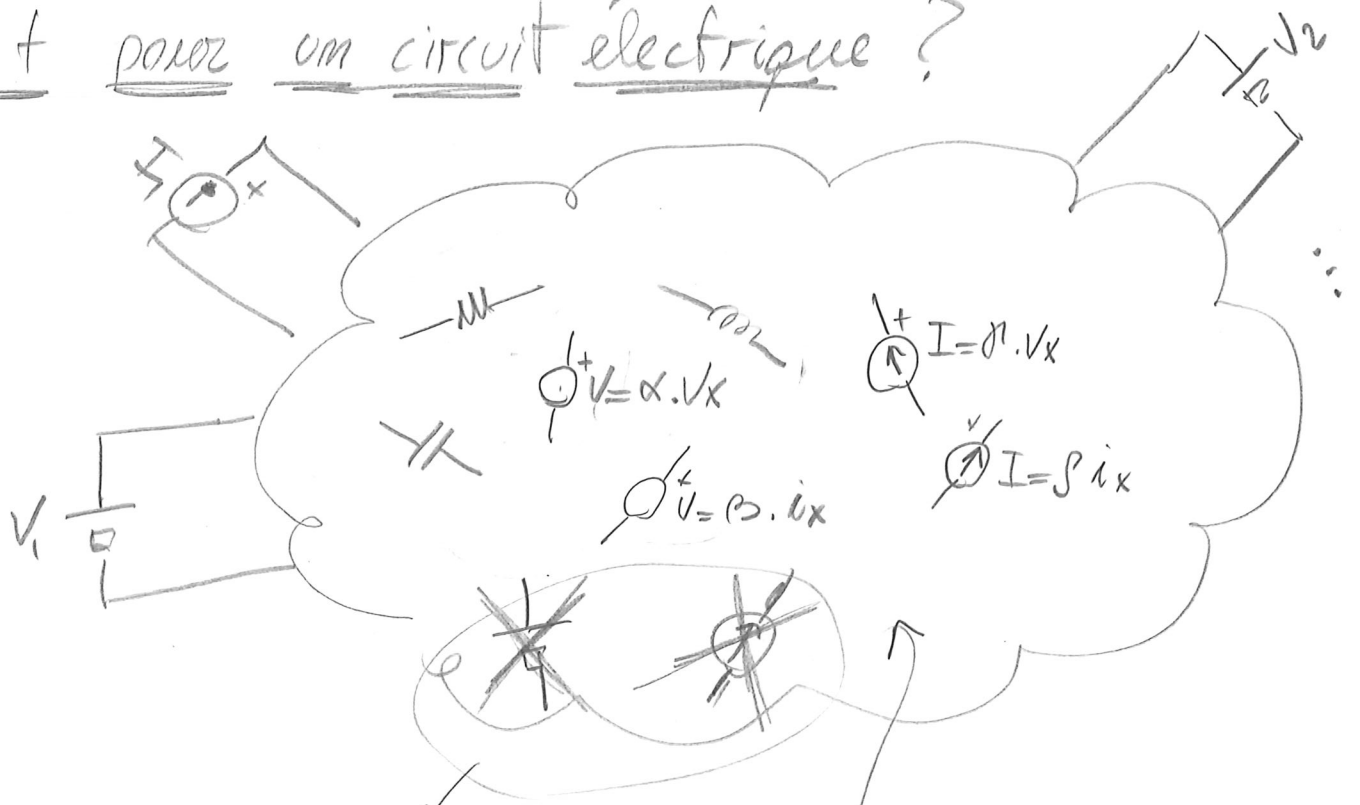
Et aussi :

$$e_1(t) = a \cdot f(t)$$

$$e_2(t) = b \cdot g(t)$$

$$\longrightarrow y(t) = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

Et pour un circuit électrique ?

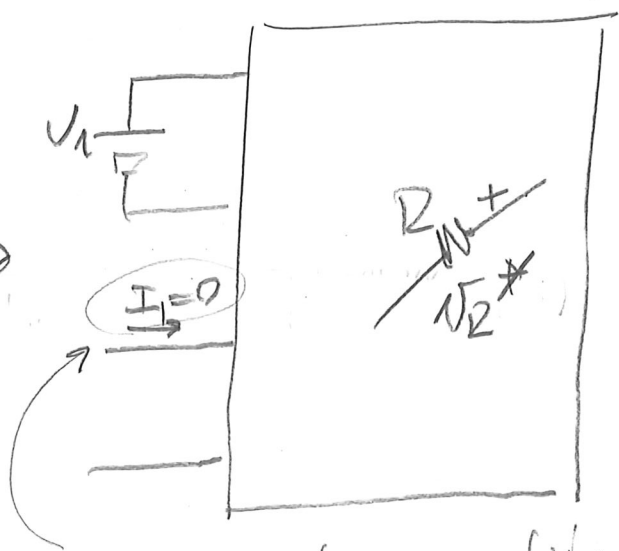
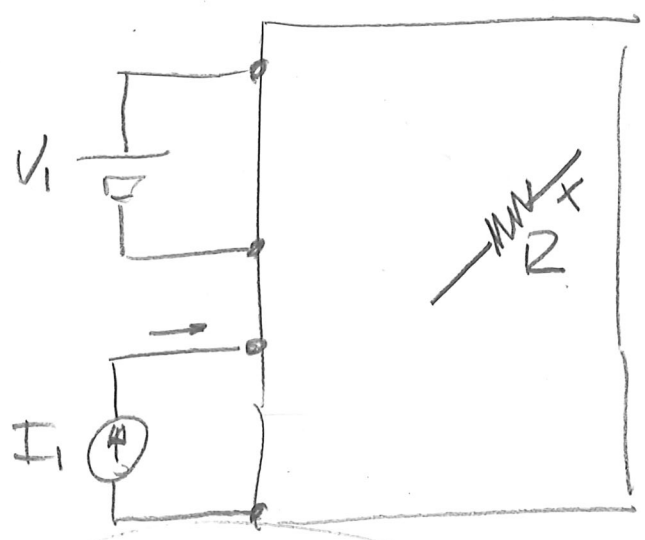


Sources indép:  
ce sont des entrées  
du circuit  $\Rightarrow$  il ne  
font pas partie du circuit

Circuit linéaire

Principe de superposition appliqué aux circuits

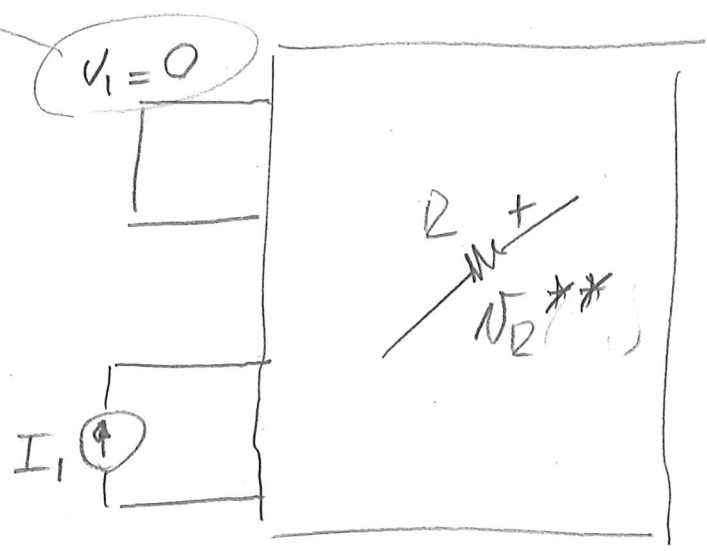
La tension (ou courant) à travers un composant  
(d'un circuit linéaire) est la somme des  
tension (ou courant) produites par chaque  
source indép. agissant seule



Neutralisation  
des sources

$I_1 = 0$  signifie : on retire  
la source indep. de courant  
+

$V_1 = 0$  signifie :  
on court-circuite  
la source indep.  
de tension

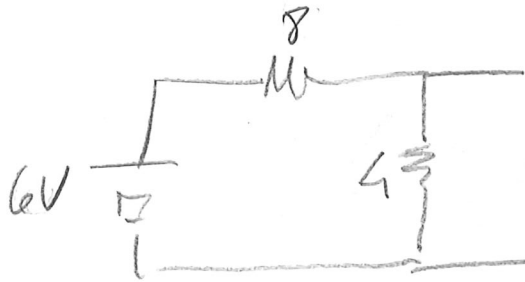
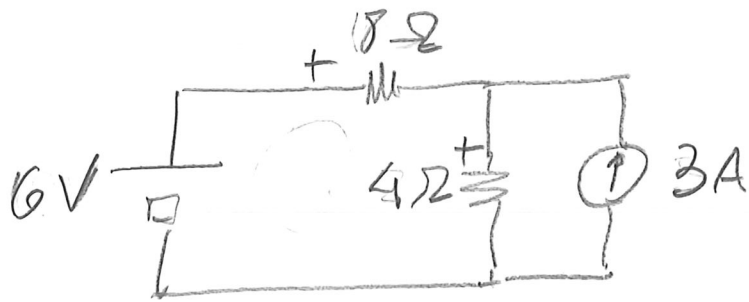


$$\Rightarrow V_R = V_R^* + V_R^{**}$$

$$i_R = i_R^* + i_R^{**}$$

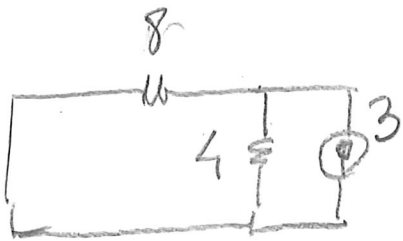
Example

$$V_{2\Omega} = ?$$



Div. tension

$$\Rightarrow V_{R_2}^{**} = 6 \times \frac{4}{12} = 2V$$



$$\Rightarrow i_{R_2}^{**} = 3 \times \frac{18}{8+4} = 2A$$

$$\Rightarrow V_{R_2}^{**} = 4\Omega \times 2A = 8V$$

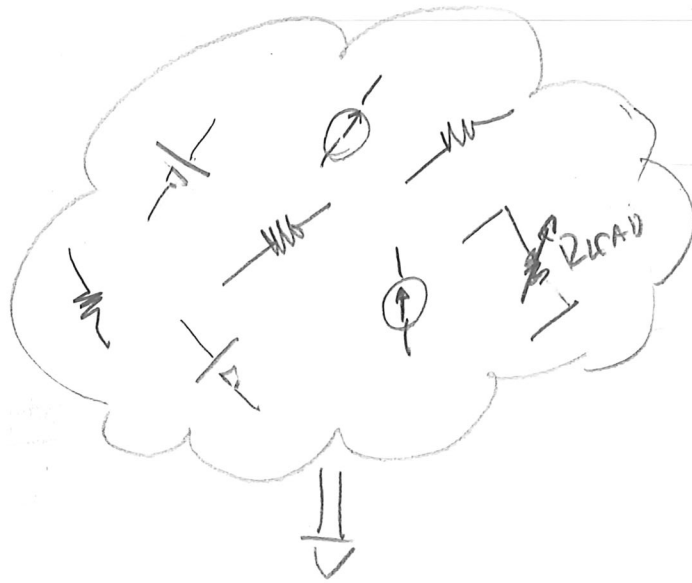
$$\Rightarrow \boxed{V_{R_2} = 2V + 8V = 10V}$$

————— x —————

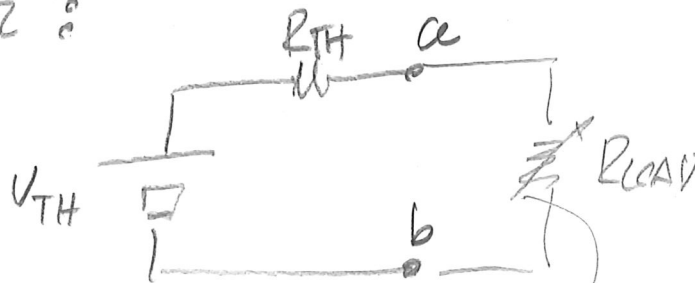
# Théorème de Thévenin (1873)

(5)

→ Leon Thévenin

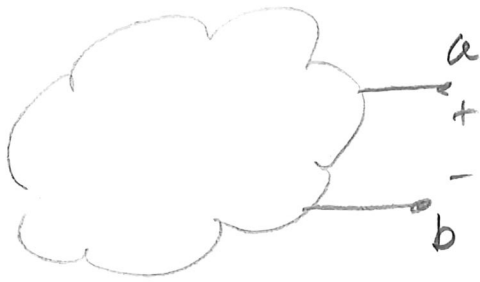


Thévenin: on peut remplacer ça par :



→ On ne doit pas recalculer un circuit (linéaire) complexe si  $R_{LOAD}$  change !

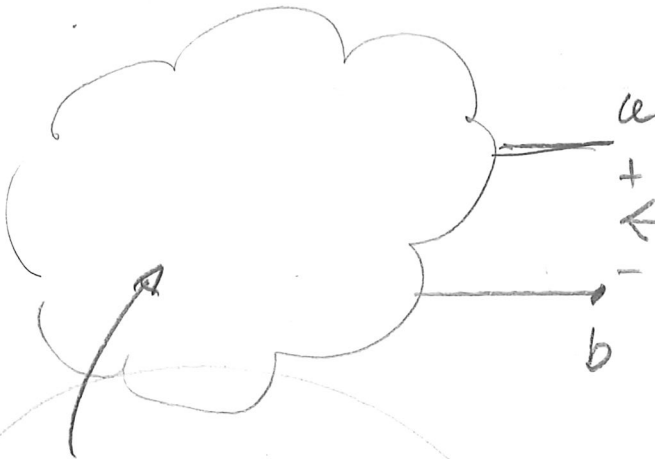
$V_{TH}$  ?



On déconnecte  $R_{LOAD}$

$V_{oc} = V_{TH}$  : tension à circuit ouvert.

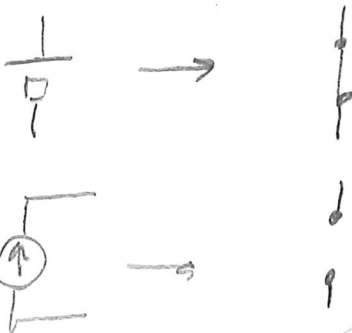
$R_{TH}$  : ?



On déconnecte  $R_{LOAD}$ .

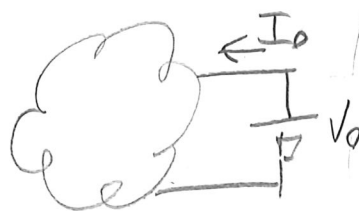
$R_{eq}$  (Résistance vue entre 'a' et 'b')

Neutralisation des  
toutes les sources indép



Nota bene :

Comment calculer  
 $R_{eq}$  si on a des  
sources dépendantes ?



1) On connecte une  
source  $V_0$  et on  
calcule  $I_0 \Rightarrow R = \frac{V_0}{I_0}$

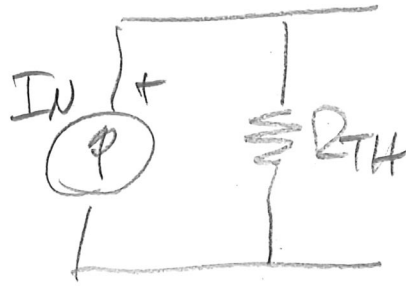
2) Idem, avec une  $\phi$

# Théorème de Norton

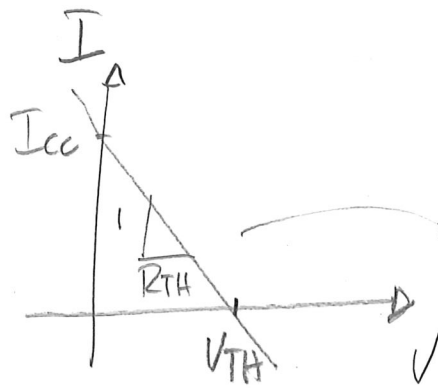
6



Transformation  
des  
sources  
réelles



$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}}$$

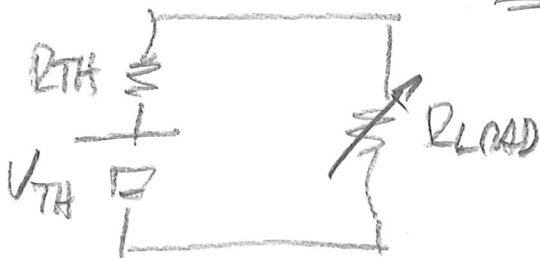


$$\frac{1}{R_{TH}} = \frac{I_{CC}}{V_{TH}} \Rightarrow I_{CC} = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} \downarrow \triangleq I_{NORTON}$$

## Transfert de puissance maximale

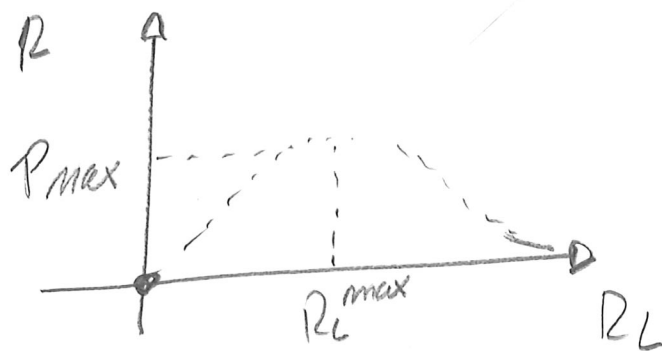
Soient:  $V_{TH}$ ,  $R_{TH}$  : fixes

$R_{LOAD}$  : variable



Question: valeur de  $R_L$  pour  
que  $P_{R_{LOAD}}$  soit maximale?

$$P = i^2 \cdot R_L = \left( \frac{V_{TH}}{R_L + R_{TH}} \right)^2 \cdot R_L$$



$$R_L \rightarrow \infty \Rightarrow$$

$$P = \frac{V_{TH}^2}{\infty^2} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty^2} \rightarrow 0$$

$$P = \frac{A^2 \cdot R_L}{(B + R_L)^2} \quad \left( \begin{array}{l} A = V_{TH} \\ B = R_{TH} \end{array} \right)$$

$$\left[ \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{u'v - uv'}{v^2} \right]$$

$$u = A^2 \cdot R_L \rightarrow u' = A^2$$

$$v = (B + R_L)^2 \rightarrow v' = 2(B + R_L)$$

$$\Rightarrow \frac{dP}{dR_L} = \frac{A^2 \cdot (B + R_L)^2 - A^2 R_L \cdot 2(B + R_L)}{(B + R_L)^4} =$$

$$= \frac{A^2 \cancel{(B + R_L)} \cdot (B + R_L - 2R_L)}{(B + R_L)^{\cancel{4} 3}} = \frac{A^2 (B - R_L)}{(B + R_L)^3}$$

7

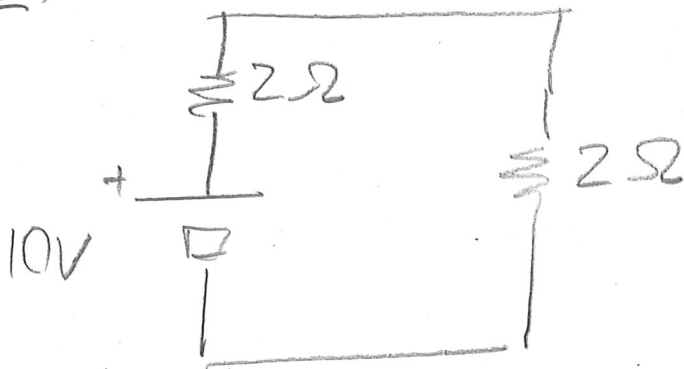
$$\frac{dP}{dR_L} = \frac{V_{TH}^2 (R_{TH} - R_L)}{(R_{TH} + R_L)^3} = 0$$

↑  
max or  
min

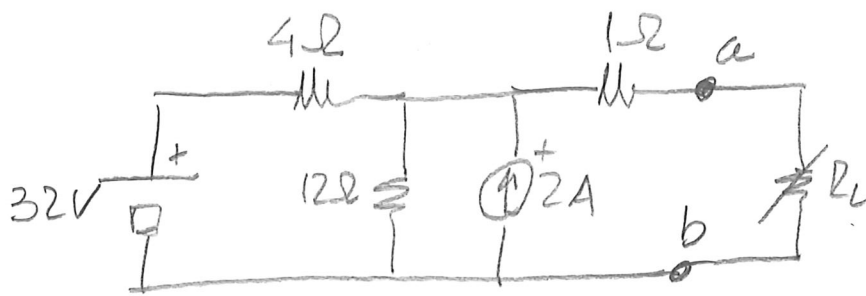
$$\Rightarrow \underbrace{V_{TH}^2}_{\neq 0} \underbrace{(R_{TH} - R_L)}_{=0} = 0$$

$$R_{TH} - R_L = 0 \Rightarrow \boxed{R_L = R_{TH}}$$

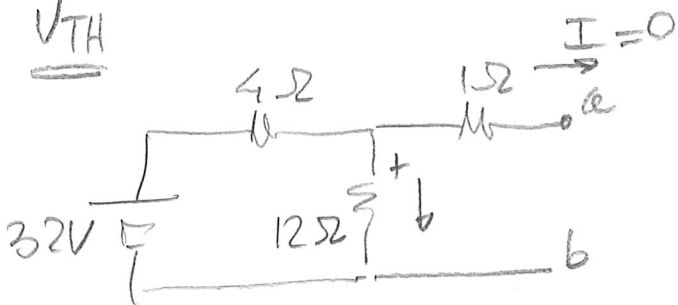
Ex



# Example (4.8 livre Alexander)

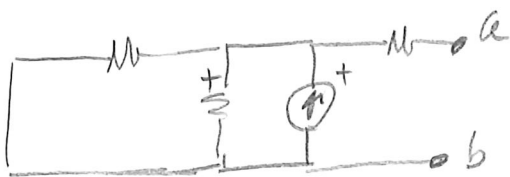


$V_{TH}$



$$V_{ab}^{(1)} = V_{R_2} = 32V \times \frac{12\Omega}{12+4\Omega}$$

$$V_{ab}^{(1)} = 24V$$



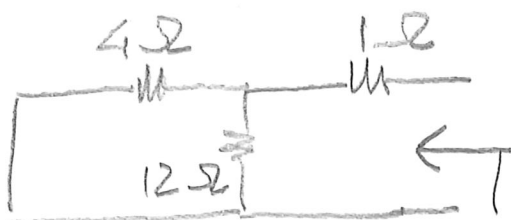
$$I_{R_2}^{(2)} = 2A \times \frac{4}{12+4} = 0,5A$$

$$V_{R_2}^{(2)} = 0,5 \times 12 = 6V$$

$$\Rightarrow V_{ab} = V_{R_2}^{(1)} + V_{R_2}^{(2)} = 24 + 6 = 30V$$

$$\boxed{V_{TH} = 30V}$$

$R_{TH}$



$$\boxed{R_{TH} = 1\Omega + (12\Omega // 4\Omega)}$$

$$= 1 + \frac{12 \times 4}{12+4} = \boxed{4\Omega}$$